Area-Funktionen

Umkehrfunktionen zu hyperbolischen Funktionen

Text Nr. 51111

Stand: 4. Juni 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

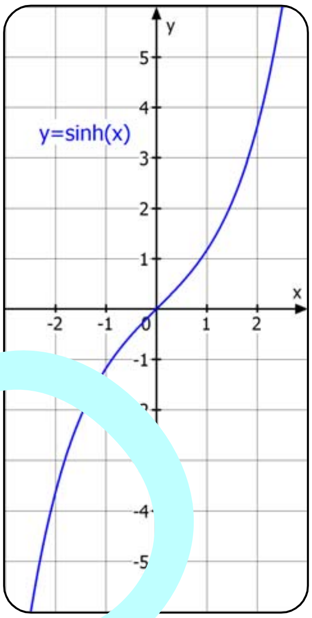
Vorwort

Umkehrfunktionen sind schon nicht einfach.

Erst recht dann die Umkehrfunktionen zu den hyperbolischen Funktionen.

Inhalt

1 Die Umkehrfunktion zu sinh ist arsinh



Die Funktion $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

hat den Definitionsbereich **D** $= \mathbb{R}$ und ist stetig.

Ihre Ableitung ist $f'(x) = \sinh'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x)$.

Weil cosh(x) > 0 ist für alle x, ist f streng monoton steigend.

Ihr Wertebereich ist **W** $= \mathbb{R}$

Die Funktion sinh ist also umkehrbar.

Die Umkehrfunktion heißt **Area Sinus (hyperbolicus): arsinh**

Herleitung ihrer Gleichung:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \quad | \cdot e^x$$

$$2y \cdot e^x = e^{2x} - 1$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für e^x:

$$e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$

Die Mitternachtsformel liefert:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Die zweite Lösung mit dem Minuszeichen scheidet aus, denn $y - \sqrt{y^2+1} < 0$, während die linke Seite $e^x > 0$ ist. Also folgt:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

Logarithmieren ergibt: $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Das ist bereits die Umkehrfunktion, die jedem y umgekehrt x zuordnet.

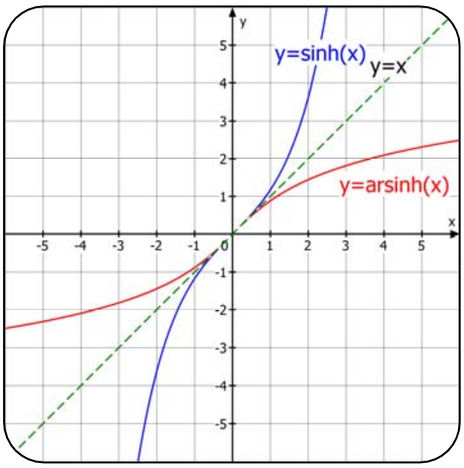
Weil es üblich ist, die vorgegebene Variable mit x zu bezeichnen, vertauscht man noch x und y:

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{ar}\sinh(x)$$

Die Umkehrfunktion zu f(x) = sinh(x) ist also $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{ar}\sinh(x)$.

Weil sinh und arsinh Umkehrfunktionen zueinander sind, gilt:

$\sinh(\operatorname{ar}\sinh(x)) = x$ und $\operatorname{ar}\sinh(\sinh(x)) = x$



Für die Funktion arsinh gilt:

$$\mathbb{W} = \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Ableitung der Umkehrfunktion arsinh:

Zuerst umkehren: $y = \operatorname{arsinh}(x) \Leftrightarrow \sinh(y) = x$

Ableiten mit der Kettenregel: $\cosh(y) \cdot y' = 1$

Daraus folgt: $y' = \dfrac{1}{\cosh(y)}$

y wieder ersetzen: $y' = \dfrac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}$

Wegen $\cosh(u) = \sqrt{1+\sinh^2(u)}$: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}}$

Wegen $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ folgt: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ergebnis: $\operatorname{arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Zusatz: Man kann natürlich $y = \operatorname{arsinh}(x)$ auch über die ln-Darstellung ableiten.

Das setut aber voraus, dass [illegible] dass $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ ist.

Dann kann man über die Kettenregel ableiten:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \underset{\text{mit } \sqrt{x^2+1}}{\overset{\text{erweitern}}{=}} \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$$

Kürzer ist das im Grunde nicht, denn man benötigt zuvor die Umformung von arsinh in eine LN-Funktion!

Folgerung: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + C$